Lineare Algebra\_A02

**Aufgabe 5:**

Ac = Ω\A = {w ∈ Ω | w ∉ A}

Ai ⊆ Ω

∪*i∈I* A*i* := {w ∈ Ω | ∃i ∈ I : w ∈ Ai}

∩*i∈I* A*i* := {w ∈ Ω | ∀i ∈ I : w ∈ Ai}

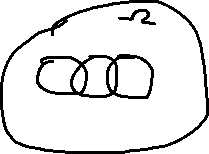
Die De Morgan’schen Formeln:

1. ∪*i∈I* A*i* := (∩*i∈I* A*ic*)c
2. ∩*i∈I* A*i* := (∪*i∈I* A*ic*)c

Z.Z : ∪*i∈I* A*i* := (∩*i∈I* A*ic*)c

(∩*i∈I* A*ic*)c = Ω \ {Ω\Ai} = Ω \ { ∃i ∈ I : w ∈ Ω ∧ w ∉ Ai }

⇔ {w ∈ Ω ∧ w ∉ { ∃i ∈ I : w ∈ Ω ∧ w ∉ Ai }}



⇔ {w ∈ Ω ∧ w ∈ { ∃i ∈ I : w ∈ Ai }}

⇔ { w ∈ Ω ∧ ∃i ∈ I : w ∈ Ai } ⇔ ∪*i∈I* A*i*

Z.Z : ∩*i∈I* A*i* := (∪*i∈I* A*ic*)c

(∪*i∈I* A*ic*)c = Ω \ {Ω\Ai}= Ω \ { ∀i ∈ I : w ∈ Ω ∧ w ∉ Ai }

⇔ {w ∈ Ω ∧ w ∉ { ∀i ∈ I : w ∈ Ω ∧ w ∉ Ai }}

⇔ {w ∈ Ω ∧ w ∈ { ∀i ∈ I : w ∈ Ai }}

⇔ { w ∈ Ω ∧ ∀i ∈ I : w ∈ Ai } ⇔ ∩*i∈I* A*i*

**Aufgabe 6:**

(A) R ⊆ V x V

a) R1 = {(A,B) | A balzt vor B}

Symmetrie:

Hier geht nicht hervor, dass nur weil A vor B balzt auch B vor A balzt. Diese Relation ist somit **nicht symmetrisch**!

Reflexivität:

Vogel A balzt vor Vogel B, das bedeutet nicht das Vogel A vor sich selbst balzt oder besser gesagt jeder Vogel balzt mit sich selbst. Somit ist die Aussage **nicht reflexiv**!

Transitivität:

Vogel A balzt vor Vogel B, wenn jetzt Vogel B vor Vogel C balzt, dann ist es nicht eindeutig, ob Vogel A automatisch auch vor Vogel C balzt. Die Aussage ist somit **nicht transitiv!**

b) R2 = {(A,B) | A baut ein Nest mit B}

Symmetrie:

Hier kann man schlussfolgern, dass Vogel A nur mit Vogel B ein Nest baut, somit baut auch Vogel B nur mit A ein Nest. Diese Relation ist somit **symmetrisch!**

Reflexivität:

Vogel A baut mit Vogel B ein Nest, das bedeutet das Vogel A auch mit sich selber und mit B ein Nest, daraus kann man Schlussfolgern, dass diese Aussage  **reflexiv** ist!

Transitivität:

Vogel A baut ein Nest mit Vogel B, wenn jetzt Vogel B mit Vogel C ein Nest baut, dann baut auch Vogel A mit Vogel C ein Nest. Somit würden sie ein Nest zu dritt bauen, deswegen ist die Aussage **nicht** **transitiv!**

c) R3 = {(A,B) | A ist aus einem Ei geschlüpft, dass B gelegt hat}

Symmetrie:

Hier kann man schlussfolgern, dass Vogel A aus dem Ei von Vogel B geschlüpft ist. Es kann aber nicht sein, dass Vogel B aus dem Ei von Vogel A schlüpft, wenn Vogel A aus dem Ei von Vogel B kommt. (Vogel B wäre in dem Fall, das Elternteil) Die Relation ist somit **nicht symmetrisch!**

Reflexivität:

Vogel A ist somit das Kind von Vogel B. Es kann also nicht sein das jeder Vogel, das Kind von sich selbst ist. Diese Relation ist somit **nicht reflexiv!**

Transitivität:

Vogel A schlüpft aus B und B schlüpft aus, heißt nicht das A aus C schlüpft **nicht transitiv!**

d) R4 = {(A,B) | ∃C ∈ V: (C,A) ∈ R3 ∧ (C,B) ∈ R3}

Symmetrie:

Der Vogel C ist aus dem Ei von Vogel (A,B) geschlüpft, dies bedeutet das Vogel A und Vogel B die Eltern sind. Daraus kann man schließen, dass Vogel C auch aus Vogel (B,A) Ei schlüpft. Somit ist diese Relation **symmetrisch!**

Reflexivität:

Vogel C schlüpft aus dem Ei von Vogel A und B, das heißt dass jeder Vogel C auch aus Vogel (A,A) oder Vogel (B,B)schlüpft. Somit ist die Aussage **reflexiv!**

Transitivität:

Vogel C schlüpft aus dem Ei von Vogel A und B, angenommen Vogel A, B schlüpfen aus Vogel D’s Ei, dann kann man schlussfolgern, dass Vogel C nicht deswegen aus dem Ei von Vogel D geschlüpft ist. Diese Relation ist somit **transitiv!**

(B)

Reflexiv: R5 = {(A,B) | A weiß wie B heißt}

Symmetrisch: R6 = {(A,B) | A arbeitet zusammen mit B}

Transitiv: R7 = {(A,B) | A > B}

**Aufgabe 7:**

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch, transitiv

Partielle Ordnung: reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

Totale Ordnung: partielle Ordnung + vollständig

1. ∀x ∈ R: (x, x) ∈ R2 ist gültig, da x ≤ x bzw. y ≤ y gegeben ist -> **reflexiv**

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ⇒ (y, x) ∈ R2 ist nicht gültig, setze für x (1, 2) und y (2, 1) ein, dann ist die Symmetrie widerlegt. -> **nicht symmetrisch**

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ∧ (y, z) ∈ R2 ⇒ (x, z) ∈ R2 ist gültig, da   
x1 ≤ y1 ≤ z1 ∧ x2 ≥ y2 ≥ z2 -> **transitiv**

⇒ keine Äquivalenzrelation

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ∧ (y, x) ∈ R2 ⇒ x = y ist gültig, da y ≤ x falsch außer x = y

-> **antisymmetrisch**

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ⋁ (y, x) ∈ R2 ist nicht gültig,(x,y) ∈ R2 -> x (1, 1) y (0, 0) -> 1≤0 = 1≥0 ; (y,x) ∈ R2 -> 0≤1 = 0≥1 -> **nicht** **vollständig**

⇒ partielle Ordnung

1. ∀x ∈ R: (x, x) ∈ R2 ist gültig, sobald x = x oder y =y ist, da es immer 0 ergibt   
   -> **reflexiv**

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ⇒ (y, x) ∈ R2 ist gültig, da (y, x) ∈ R2 : y1 – x2 = x1 – y2 ergibt und sich nichts an der Relation geändert hat -> **symmetrisch**

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ∧ (y, z) ∈ R2 ⇒ (x, z) ∈ R2 ist gültig, x (1, 2) z (2, 1) ->  
x1 – y2 = y1 -x2 und y1 - z2 = z1 – y2 ⇒ x1 - z2 = z1 – x2 ⇒ 1 – 1 = 2 – 2 ⇒ 0 =0  
-> **transitiv**

⇒ Äquivalenzrelation

1. ∀x ∈ R: (x, x) ∈ R2 ist gültig, |x1|+|x2| ≤ |x1|+|x2| -> **reflexiv**

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ⇒ (y, x) ∈ R2 wenn |x1|+|x2| ≤ |y1|+|y2| dann |y1|+|y2| ≤ |x1|+|x2| stimmt aber nicht, x (1, 0) y (2, 1)

⇒ 1+0 ≤ 2+1 = 1 ≤ 3 stimmt

⇒ 2+1 ≤ 1+0 = 3 ≤ 1 falsch -> **nicht symmetrisch**

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ∧ (y, x) ∈ R2 ⇒ x = y ist nicht gültig, da aus x ≤ y folgt das die Aussage y ≤ x falsch ist, außer wenn x = y gilt -> **nicht antisymmetrisch**

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ∧ (y, z) ∈ R2 ⇒ (x, z) , x ≤ y impliziert, dass auch x ≤ z gelten muss ->**transitiv**

∀(x, y) ∈ R: (x, y) ∈ R2 ⋁ (y, x) ∈ R2 ist gültig, da x ≤ y gilt -> **vollständig**

⇒ nichts

1. ∀x ∈ R: (x, x) ∈ R2 ist nicht gültig, da nicht impliziert wird das x =x geltet.   
   x (1, 2): x1 +x1 = x2 + x2 -> 1+1 = 2+2 -> 2≠4   
   -> **nicht reflexiv**

⇒ nichts

**Aufgabe 8:**

Mn := {(x, y) ∈ Z x Z | ∃z ∈ Z: x = y + nz}

Reflexivität: ∃z ∈ Z: x = y +nz ⇒ x – y = n\* z ⇒ x-y = n\*0 ⇒ (x, x) ∈ Mn

Symmetrie: ∀x,y ∈ Z: (x, y) ∈ Mn ⇒ y=x-n\*z ⇒ y= x + n\* (-z)   
(-z = z ∈ Z ⇒ -z ∈ Z)

Transitivität:   
∀x,y ∈ Z: (x, y) ∈ Mn ⇒ x = y +n\*z  
(y,v) ∈ Z: (y,z) ∈ Mn ⇒ y = v +n\*z ⇒ x = v +n\*z1 +n\*z2 ⇒ x= v + n(z1+z2)  
⇒ x =v + n\* z3 ⇒ (x,v) ∈ Mn

[x] = {y ∈ Z | (x, y) ∈ Mn }

[0] = {y ∈ Z | (0, y) ∈ Mn } = { y ∈ Z : ∃z∈ Z: 0 = y +n\*z}= { y ∈ Z : ∃z∈ Z: y = n\*z}

[0] = {0, n, -n, 2n, -2n}

[1] = {1, n+1, 2, n+2,... ,-(n+1), -(2n+1) }

Es muss immer 1 Rest rauskommen, bei der Äquivalenzklasse von [1]!

Das gleiche bei der Äquivalenzklasse [2] -> 2 Rest!

.  
.

Es gibt n viele Äquivalenzklassen, wenn n = 0 ist sogar unendlich viele Äquivalenzklassen. D.h sobald n oder auch z 0 ist gibt es unendlich viele Äquivalenzklassen

A07)